Schräge Ellipsen
Hauptachsentransformation

Ellipsen von einer Gleichung wie

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$$

auf diese Form bringen:

$$20x^2 + 45y^2 = 180 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Dazu gibt es weitere Texte:

54302 Algebraische Kurven 2. Ordnung

in Normallage

23120 Schräge Ellipsen

für MatheGrafix

Text Nr. 54303

Stand 21. April 2022

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

https://mathe-cd.de

Vorwort

Dieser Text ist eine Fortsetzung des Textes 54301, in dem Kurven 2. Grades (Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln) in Normallage untersucht wurden. Enthält die algebraische ein xy-Glied, dann hat die Kurve eine Schräglage. Es gibt zwei Methoden, diese Schräglage zu beseitigen.
In Text 54302 wird dies durch Drehung der Kurve in Normallage erreicht.
In vorliegendem Text 54303 geht man eleganter vor und dreht das Achsenkreuz durch Einführung eines geeigneten neuen Koordinatensystems. Sie erfordert jedoch Vorkenntnisse aus der Matrizenrechnung (Diagonalisierung der Koeffizientenmatrix durch Basiswechsel auf normierte Eigenvektoren)
Ich beschränke mich hier jedoch auf Ellipsen.

Inhalt:

1 Wichtige Vorkenntnisse über Matrizen

1.1 Arten von Matrizen

Matrizen sind Zahlenschemata, die man zur Vereinfachung von Berechnungen erfunden hat:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist eine Zweiermatrix, sie hat den Typ (2,2)

$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ ist eine Dreiermatrix, sie hat den Typ (3,3). Beides sind quadratische Matrizen.

$C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ ist eine (2,3)-Matrix (2 Zeilen, 3 Spalten).

$D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ ist eine (3,2)-Matrix (3 Zeilen), 2 Spalten).

Man kann Vektoren auch als Matrizen interpretieren:

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ist ein **Spaltenvektor**, und zwar eine (2,1)-Matrix

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \mid v_2 \end{pmatrix}$ ist ein **Zeilenvektor**, und zwar eine (1,2)-Matrix.

Spezielle Matrizen:

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sind **Einheitsmatrizen**.

$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ oder $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ sind **Diagonalmatrizen**.

(Außer in der Hauptdiagonale stehen nur Nullen.)

$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ ist eine **Dreiecksmatrix**.

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ oder $T = \begin{pmatrix} r & a & b \\ a & s & c \\ b & c & t \end{pmatrix}$ sind **symmetrische Matrizen**:

Die Hauptdiagonale ist eine Symmetrieachse: Rechts oberhalb und links unterhalb dieser Diagonale sind die Zahlen gespiegelt.

Eine Matrix heißt orthogonal, wenn ihre Spaltenvektoren paarweise orthogonal sind

Eine Matrix heißt normiert, wenn ihre Spaltenvektoren den Betrag 1 haben.

1.2 Rechnen mit Matrizen:

Transponierte Matrizen entstehen durch vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = (x \mid y) \quad \text{und} \quad (x \mid y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Es gilt: $\left(M^T\right)^T = M$

Zwei Matrizen kann man nur dann **addieren**, wenn sie vom gleichen Typ sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 3+0 \\ 2-1 & -5+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (1 \mid 4)$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert usw.

Matrizenmultiplikation ist nur definiert für zwei Matrizen die transponierte Typen haben:

$(a \mid b) \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a \cdot c + b \cdot d)$ Eine (2,1)-Matrix mal eine (1,2)-Matrix ergibt eine (1,1)-Matrix.

Achtung: In manchen Anwendungen wird eine (1,1)-Matrix auch als Zahl interpretiert.

Beispiel: $(3 \mid 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = (15+8) = (23)$ als Matrix

$(3 \mid 2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 23$ als Zahl.

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \end{pmatrix}$ (Methode: Man rechnet zweimal „Zeile mal Spalte".

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist nicht definiert, weil die Möglichkeit „Zeile mal Spalte" nicht besteht.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ Man rechnet viermal „Zeile mal Spalte".

Wichtig: $E \cdot A = A \cdot E = A$!!!

Vielfache von Matrizen:

$k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ und $r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}$ Der Faktor wird mit jeder Zahl der Matrix multipliziert.

Diagonalisieren von Matrizen

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten einer reellen symmetrischen Matrix sind stets orthogonal. Hat eine Matrix A nur verschiedene Eigenwerte, kann man aus ihren Eigenvektoren eine Orthogonalbasis S bilden, mit deren Hilfe man A diagonalisieren kann. Die Formel dazu ist

$$D = S^T \cdot A \cdot S$$

Das wird in diesem Text sehr oft gebraucht.

1.3 Determinante und Inverse Matrix (hier nur für Zweiermatrizen)

Man kann einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnen, die man ihre Determinante nennt.

Für Zweiermatrizen gilt: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - c \cdot b$

Das **Inverse einer Zweiermatrix** wird so berechnet:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Die Zahlen der Hauptdiagonale werden vertauscht, die anderen beiden ändern das Vorzeichen.

Die **Bedeutung einer inversen Matrix** liegt darin, dass gilt: $A \cdot A^{-1} = E$ (Einheitsmatrix)

z. B.: Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

und es gilt: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 & -\frac{5}{2} \cdot 3 + \frac{3}{2} \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 & -\frac{5}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$

Und auch $A^{-1} \cdot A = E$.

Damit kann man Gleichungen umstellen:

Aus $\vec{x}' = A \cdot \vec{x}$

folgt durch Multiplikation von links mit A^{-1}: $A^{-1} \cdot \vec{x}' = A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x})$

Es gilt das Assoziativgesetz: $A^{-1} \cdot \vec{x}' = \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{E} \cdot \vec{x}$

Jetzt kommt die Einheitsmatrix ins Spiel: $A^{-1} \cdot \vec{x}' = E \cdot \vec{x}$

$A^{-1} \cdot \vec{x}' = \vec{x}$

1.4 Eigenvektoren von Matrizen

Ein Vektor $\vec{u} \neq \vec{o}$, für den gilt: $A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$, heißt Eigenvektor von A, λ ist der zugehörige Eigenwert.
Die Berechnung geht nach dem Drei-Schritt-Verfahren: Zuerst wird das Eigenwertsystem EWS erstellt. Das ist ein Gleichungssystem, dessen Lösungen die Eigenwerte sind.
Dann werden die Eigenvektoren berechnet. Dazu gibt es zwei verschiedene Verfahren:
Einmal als Lösung des Eigenwertsystems, oder aber als zu den Zeilenvektoren des EWS orthogonale Vektoren.

Bitte nachlesen im Text 62160

Die Berechnung wird in den Lösungen hier gezeigt, aber nicht die ausführliche Erklärung, wieso man so rechnet ….

2 Quadratische Terme durch Matrizen darstellen

a) Grundlage

Der Term $ax^2 + by^2$ kann so dargestellt werden: $(x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dabei ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ der Ortsvektor eines Punktes $P(x \mid y)$,

$(x \mid y)$ ist der transponierte Ortvektor: $\vec{x}^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T = (x \mid y)$.

und $K = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ist die **Koeffizientenmatrix des Terms**.

Beweis: Zunächst ist: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$

Dann $(x \mid y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = (x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix} = ax^2 + by^2$

Diese Darstellung hat den großen Vorteil darin, dass man z. B. Ellipsengleichungen in Matrixform darstellen kann. Die Drehung einer Ellipse kann man durch Matrizenmultiplikation gut berechnen.

b) Rechenbeispiele

$$(x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 5x + 4y \end{pmatrix} = x \cdot (3x - 2y) + y(5x + 4y) = 3x^2 - 2xy + 5xy + 4y^2$$

Also ist $(x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 + 3xy + 4y^2$

Man kann hieraus eine **Merkregel** erkennen:

Die Zahlen 3 und 4 der Hauptdiagonale sind die Koeffizienten von x^2 und y^2.
Die Zahlen -2 und 5 der Nebendiagonale sind die Koeffizienten des gemischten Produktes xy, und man kann sie addieren!

Also:

$$(x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 \\ 8 & \boxed{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{3}x^2 + \boxed{1+8}xy + \boxed{2}y^2$$

Wichtig ist vor allem die Umkehrung

$5x^2 - \boxed{4}xy + 9y^2 = (x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} 5 & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Die $\boxed{4}$ wird *für viele Anwendungen* halbiert!

$4x^2 \boxed{-3}xy + 8y^2 = (x \mid y) \cdot \begin{pmatrix} 4 & \boxed{-\frac{3}{2}} \\ \boxed{-\frac{3}{2}} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ Hier wird die $\boxed{-3}$ halbiert,

$ax^2 + \boxed{b}xy + cy^2 = (x \mid y) \begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}b \\ \frac{1}{2}b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und hier wird b halbiert.

c) Kreis- und Ellipsengleichungen in Matrixdarstellung:

(1) $x^2 + y^2 = 25$ stellt einen Kreis um $M(0\,|\,0)$ mit r = 5 dar.

Matrixdarstellung: $(x\,|\,y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 25$

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ bzw. $9x^2 + 16y^2 = 144$

stellt eine Ellipse um $M(0\,|\,0)$ mit den Halbachsen a = 4, b = 3 dar.

Matrixdarstellung: $(x\,|\,y)\cdot\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 144$

(3) $x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$ stellt eine schräg liegende Ellipse dar.

Matrixdarstellung: $(x\,|\,y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 1$

(4) $4x^2 - 5xy + 20y^2 = 60$ stellt eine schräg liegende Ellipse dar.

Matrixdarstellung: $(x\,|\,y)\cdot\begin{pmatrix}4 & \frac{5}{2}\\ \frac{5}{2} & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 60$

(5) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 20x + 140y + 500 = 0$ Schräge Ellipse.

Matrixdarstellung: $(x\,|\,y)\cdot\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + (20\,|\,140)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + 500 = 0$

Man beachte: Dadurch, dass man den xy-Koeffizienten je zur Hälfte in die Nebendiagonale schreibt, wird die Koeffizientenmatrix K symmetrisch.
Das hat für weitere Berechnungen einen Vorteil.

3 Hauptachsentransformationen für Ursprungsellipsen

E1 Gegeben ist die schräge Ellipse E durch: $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ 5 Beispiele

Ihre Matrixdarstellung lautet: $(x \mid y)\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$

Wir wollen einen Basiswechsel vornehmen (also das Koordinatensystem drehen), so dass das neue Koordinatensystem auf den schrägen Ellipsenachsen liegt.. Hinsichtlich dieser neuen Sachsen hat sie dann Normalform und die Matrix der Ellipse Diagonalform. Das bedeutet, dass dann kein xy-Glied mehr vorhanden ist. Als neue Basis nimmt man zwei linear unabhängige Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix. Diese werden zusätzlich noch normiert. Die Transformationsmatrix besteht dann aus diesen beiden normierten Eigenvektoren. Sie ist symmetrisch und erzeugt dann eine Diagonalform für die Koeffizientenmatrix.

Lösung:

1. Schritt: Berechnung der Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix $K = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$:

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (5-\lambda)^2 - 9 = 0 \iff (5-\lambda)^2 = 9$

Daraus folgt: $|5-\lambda| = 3 \iff 5-\lambda = \pm 3 \iff \lambda = 5 \mp 3$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 8$.

Eigenvektorensystem: $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für $\lambda_1 = 2$: $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 3u_1 - 3u_2 = 0 \\ -3u_1 + 3u_2 = 0 \end{Bmatrix} \iff u_1 = u_2$

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = r$. Eigenvektoren sind dazu: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d. h. alle Vielfachen von $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1{}' = 2\vec{u}_1$

Kurzlösung: Die Eigenvektoren sind orthogonal zu den Zeilenvektoren des EWS: Also nimmt man einen der beiden Zeilenvektoren, vertauscht seine Koordinaten und ändert ein Vorzeichen. Die Vektoren kann man „verkürzen", weil alle Vielfache auch Eigenvektoren sind: $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für $\lambda_2 = 8$: $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{Bmatrix} -3u_1 - 3u_2 = 0 \\ -3u_1 - 3u_2 = 0 \end{Bmatrix} \iff u_1 = -u_2$

Wähle $u_2 = s \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 = -s$. Eigenvektoren sind dazu: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d. h. alle Vielfachen von $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2{}' = 8\vec{u}_2$

ODER: $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Basiswechsel

Wir wechseln von der Standardbasis $E = \{O\,;\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\}$ zur Eigenvektorenbasis $B = \{O\,;\vec{b}_1\,;\vec{b}_2\}$

mit den normierten Eigenvektoren $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Es sei $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Hinsichtlich dieser Basis ändert sich die Koeffizientenmatrix in $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$ (Diagonalform)

In der Hauptdiagonalen stehen die Eigenwerte 2 und 8.

Den Beweis für diese Diagonalisierung (Siehe Text 62165) deute ich noch kurz an.

Es sei $\vec{x}_B = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}_B$ ein Vektor zur Basis B. Dann gilt für die Umrechnung in die Basis E:

$$\vec{x}_E = \begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix}_B = r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 = r_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}_E + r_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}_E = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1\\r_2\end{pmatrix} = B\cdot\vec{x}_B$$

Umstellen nach $\vec{x}_B$: Aus $\vec{x}_E = B\cdot\vec{x}_B \;\Rightarrow\; \vec{x}_B = B^{-1}\vec{x}_E$

Die Ellipse hat bzgl. der Standardbasis E eine Matrizengleichung. In diese wird eingesetzt:

$$\boxed{(x\,|\,y)\cdot K\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad \vec{x}_E^{\,T}\cdot\mathbf{K}\cdot\vec{x}_E}$$

(*) $$\underbrace{\vec{x}_E^{\,T} = \vec{x}_B^{\,T}\cdot B^T \qquad \vec{x}_E = B\cdot\vec{x}_B}$$

Das ergibt: $$\left(\vec{x}_B^{\,T}\cdot B^T\right)\cdot K\cdot\left(B\cdot\vec{x}_B\right)$$

bzw. nach dem Assoziativgesetz: $$\vec{x}_B^{\,T}\cdot\underbrace{\left(B^T\cdot K\cdot B\right)}_{D}\cdot\vec{x}_B$$

Hilfe für (*): $\vec{x}_E = B\cdot\vec{x}_B \;\Rightarrow\; \vec{x}_E^{\,T} = (B\cdot\vec{x}_B)^T = \vec{x}_B^{\,T}\cdot B^T$

D ist nun eine Diagonalmatrix, wie man nachrechnen kann:

Zuerst benötigt man $B^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$

$$\boxed{D = B^T\cdot K\cdot B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\-3 & 5\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -8\\2 & 8\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}$$

Weitere Erkenntnis: In der Hauptdiagonalen stehen die beiden Eigenwerte der Koeffizientenmatrix !!!

Hinweis: Die Transformationsmatrix $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ ist symmetrisch und orthogonal

und normiert (d. h. die enthaltenen Basisvektoren bilden ein Orthonormalsystem.)

Daher gilt: $B^T = B^{-1}$. In der Literatur hierzu steht oft $D = B^{-1}\cdot K\cdot B$, was hier

dasselbe ist, wie $D = B^T\cdot K\cdot B$, wobei die Koeffizientenmatrix auch anders heißen kann.

Zusammenfassung und Auswertung dieser Berechnungen
Methode für weitere Aufgaben

Gegeben war eine schräg liegende Ellipse durch $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$.

Ihre Koeffizientenmatrix ist $K = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, ihre Matrixgleichung ist $\mathbf{(x \mid y) \cdot K \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8}$

1. Schritt: Man berechnet zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu K und normiert sie.

Ergebnis: $\vec{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten 2 und 8.

d. h. wenn man diese Eigenvektoren mit K abbildet erhält man $\vec{b}_1{}' = 2 \cdot \vec{b}_1$ und $\vec{b}_2{}' = 8 \cdot \vec{b}_2$. $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ werden als neue Basis verwendet.

2. Schritt: Aus den Koordinaten von $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ liest man ab, um welche Winkel die x-Achse in die neue Lage gebracht wird. Damit kennt man einen Neigungswinkel der schrägen Ellipsenachsen.

3. Schritt: Die Umrechnung in die neue Basis geschieht mit der Matrix $B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Koeffizientenmatrix der Ellipse geht dann von K über in $D = B^T \cdot K \cdot B$.

Neue Ellipsengleichung: $(x' \mid y') \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 8$

wobei eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte hat:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Damit lautet <u>im neuen Koordinatensystem</u> die Ellipsengleichung:

$$(x' \mid y') \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2x'^2 + 8y'^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 0}$$

Die Halbachsen sind also 2 und 1 (auf den neuen Koordinatenachsen!)